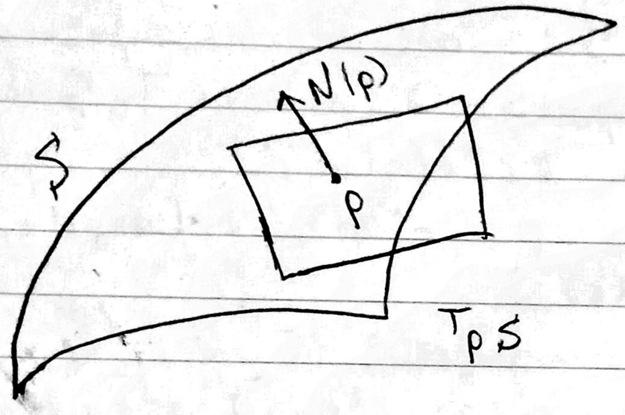
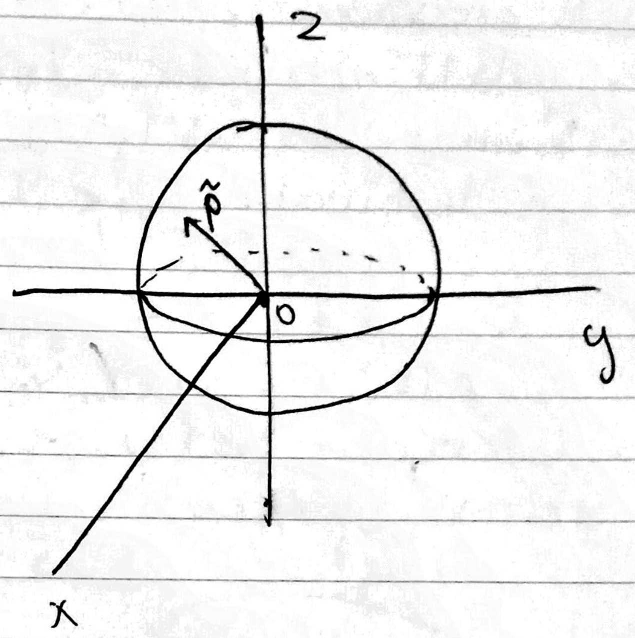
Μάθημα 15ο

01/12/2019

Απεικόνιση Gauss





$$N : S \to S^2$$
$$p \mapsto \tilde{p}$$
$$\vec{O\tilde{P}} = N(p)$$

$$S^2 = \{(x,y,z) \,/\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

Άσκηση

Θεωρούμε την επιφάνεια S με εξίσωση: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$
Να δειχθεί ότι η S είναι καμπύλη, να βρεθεί και να μελετηθεί η απεικόνιση Gauss.

Λύση

Η S είναι γράφημα της $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$
$h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
Η h είναι λεία $\Rightarrow$ $S = \Gamma_h$ είναι κανονική καμπύλη.
Η S καλύπτεται ολόκληρη από το σύστημα συντεταγμένων
$X : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to S$, $X(u,v) = (u, v, h(u,v))$
Το μοναδιαίο κάθετο είναι:

$$N = \frac{X_u \circ X_v}{\|X_u \times X_v\|} \qquad X_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$X_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right)$$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}, 1 \right)$$

$$\| X_u \times X_v \| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

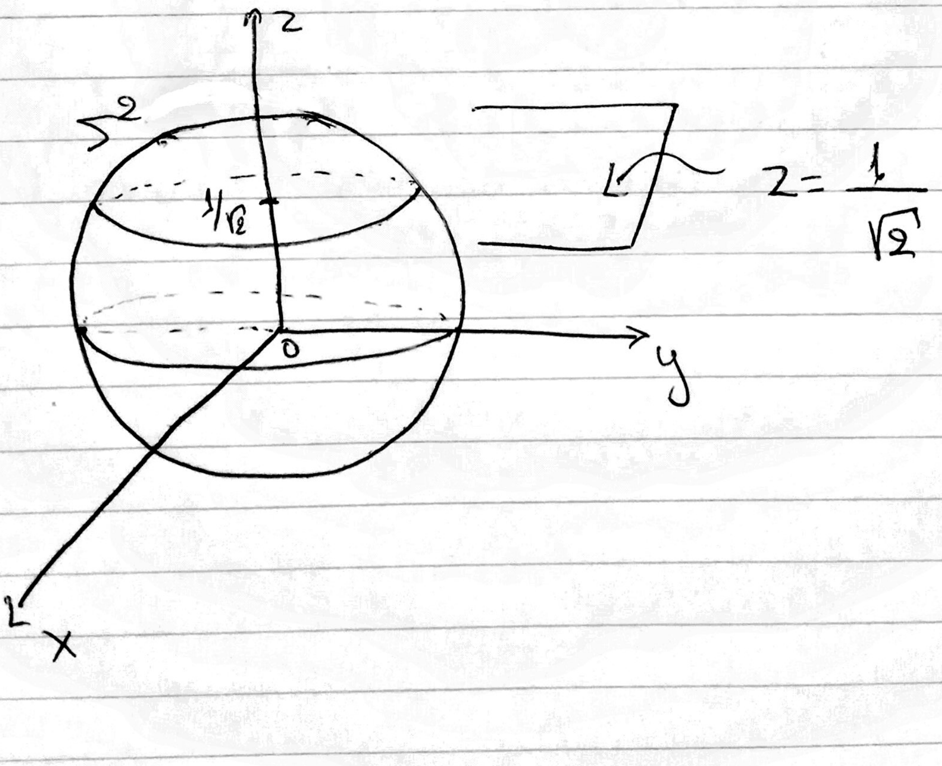
Άρα, $N = \left(\frac{-u}{\sqrt{2}\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{-v}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Η απεικόνιση Gauss είναι : $N : S \to S^2$

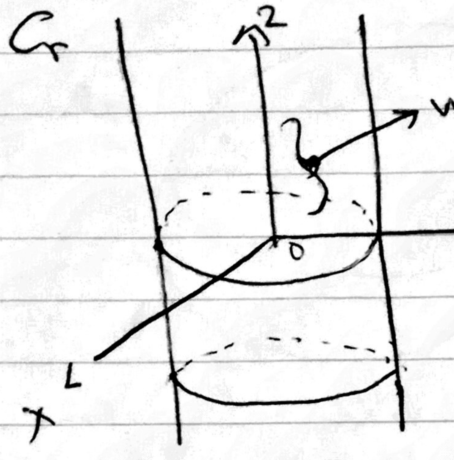
$$N(u,v,h(u,v)) = \left(-\frac{u}{\sqrt{2}\,h(u,v)}, \frac{-v}{\sqrt{2}\,h(u,v)}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Η εικόνα $N(S)$ της απεικόνισης Gauss πληροί την $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow N(S^2) = S^2 \cap \Pi$ = μικρό κύκλο.



② Κύλινδρος



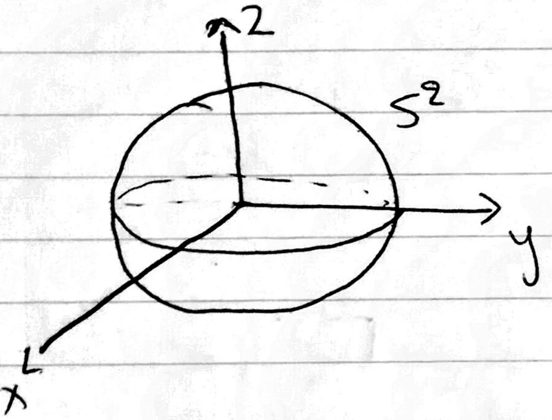
$C_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus x^2+y^2=r^2\}, r>0$

Η απεικόνιση Gauss είναι

$N : C_r \to S^2$

$N(p) = -\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 0\right)$

$p = (x,y,z) \in C_r$



$L_p : T_p C_r \to T_p C_r \quad , v \in T_p C_r$

$L_p w = - dN_p(w)$

Θεωρώ $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to C_r$

$c(0) = p, \quad c'(0) = w$

Τότε $L_p w = -(N \circ c)'(0)$

$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$w = c'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0)) = (w_1, w_2, w_3)$

$(N \circ c)(t) = N(c(t)) = N(x(t), y(t), z(t))$

$= -\frac{1}{r}(x(t), y(t), 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (N \circ c)'(0) = -\frac{1}{r}(x'(0), y'(0), 0)$

Άρα $L_p w = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0), \quad w \in T_p C_r$

$T_p S = \{ w(w_1, w_2, w_3) \in T_p \mathbb{R}^3 \setminus \langle w, N(p) \rangle = 0 \}$

$L_p : T_p C_r \to T_p C_r \quad , p \in C_r$

$L_p w = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0), \quad w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r$

$T_p C_r = \{ w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p\mathbb{R}^3 \setminus x w_1, y w_2 = 0 \}$

- $w = (0, 0, w_3)$, $L_p w = 0 = 0 w$
- $w = (w_1, w_2, 0)$, $L_p w = \frac{1}{r} w$

③ <u>Σφαίρα</u>

$S^2_R : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Η απεικόνιση Gauss είναι: $N : S^2_R \to S^2$

$N(p) = -\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$, $p = (x, y, z) \in S^2_R$

$L_p : T_p S^2_R \to T_p S^2_R$, $L_p = -dN_p$.

$L_p w = ;$

$w \in T_p S^2_R$, $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2_R$

$c(0) = p$, $c'(0) = w$

Αν $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$w = c'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0))$

$L_p w = -dN_p(w) = -(N \circ c)'(0)$.

$(N \circ c)(t) = N(c(t)) = N(x(t), y(t), z(t)) =$

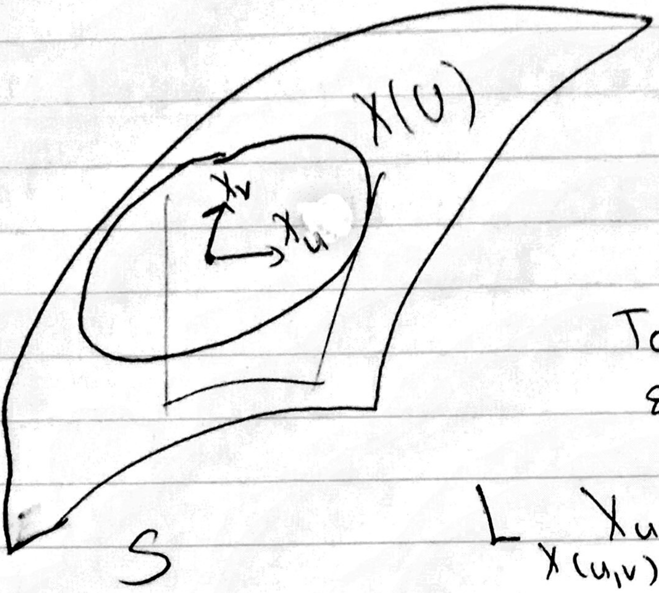
$= -\frac{1}{r}(x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow$

$(N \circ c)'(0) = -\frac{1}{r}(x'(0), y'(0), z'(0))$

$L_p w = \frac{1}{r}(x'(0), y'(0), z'(0)) = \frac{1}{r} w$

$L_p : T_p S^2_R \to T_p S^2_R$ $\quad L_p w = \frac{1}{r} w$, $w \in T_p S^2_R$

$T_p S^2_R = \{ w = (w_1, w_2, w_2) \in T_p\mathbb{R}^3 \setminus x w_1 + y w_2 + z w_2 = 0 \}$



Έστω $X : U \to S$ σύστημα συντεταγμένων με παραμέτρους $(u,v) \in U$. Τα διανύσματα $X_u(u,v), X_v(u,v)$ είναι βάση του $T_{X(u,v)}S$

$$L_{X(u,v)} X_u(u,v) = -dN_{X(u,v)}(X_u(u,v))$$

$$L_{X(u,v)} X_v(u,v) = -dN_{X(u,v)}(X_v(u,v))$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_{X(u,v)} X_u(u,v) &= -(N \circ X)_u(u,v) \\ L_{X(u,v)} X_v(u,v) &= -(N \circ X)_v(u,v) \end{aligned}}$$

$$LX_u = -N_u = -(N\circ X)_u$$
$$LX_v = -N_v = -(N\circ X)_v$$

Σύμβαση

Αυτοπροσαρτημένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί

<u>Ορισμός</u>: Έστω V $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος εφοδιασμένο με εσωτερικό γινόμενο $\langle\, ,\, \rangle$. Μια γραμμική απεικόνιση $A : V \to V$ καλείται αυτοπροσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός αν:

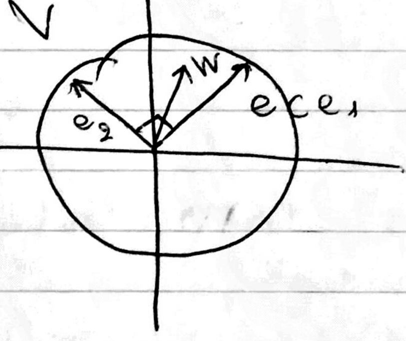
$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in V.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο A είναι αυτοπροσαρτημένος $\Leftrightarrow$ ο πίνακας ως προς ορθοκανονική βάση είναι συμμετρικός.

Έστω $A: V \to V$ αυτοπροσαρτημένος γραμμ. μετασχ.
Ορίζω τη διγραμμική μορφή $B_A : V \times V \to \mathbb{R}$.
$B_A(x,y) = \langle Ax, y \rangle = B_A(y,x)$

A αυτοπρ/νος $\Rightarrow$ B_A είναι συμ. διγρ. μορφή
Η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή είναι $Q_A : V \to \mathbb{R}$,
$Q_A(x) = B_A(x,x) = \langle Ax, x \rangle$ $x \in V$.

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: Έστω V $\mathbb{R}$ δ.χ. με εσωτ. γινομ. $\langle\, , \rangle$ και $\dim V = 2$, $A: V \to V$ αυτοπ/νος. Υποθέτω ότι η τετραγωνική μορφή Q_A λαμβάνει μέγιστο λ στο $e \in \{w \in V \,/\, \|w\| = 1\}$. Τότε ισχύει $Ae = \lambda e$.



<u>Απόδειξη</u>.
Θεωρώ βάση ορθοκανονική $\{e_1 = e, e_2\}$ του V
$\|w\| = 1$, $w = \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2$

$Q_A(w) = \langle A(\cos t\, e_1 + \sin t\, e_2), \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2 \rangle$
$= \langle Ae_1, e_1 \rangle \cos^2 t + 2 \langle Ae_1, e_2 \rangle \cos t \sin t +$
$+ \langle Ae_2, e_2 \rangle \sin^2 t = f(t)$

Η f λαμβάνει μέγιστο στο $t = 0$, $f(0) = \lambda$.
Άρα $f'(0) = 0 \Rightarrow \langle Ae_1, e_2 \rangle = 0$
$Ae = Ae_1 = \langle Ae_1, e_1 \rangle e_1 + \langle Ae_1, e_2 \rangle e_2 =$
$= Q_A(e)\, e = \lambda e$

Θεώρημα

Έστω $A: V \to V$ αυτοπρ. (ένας για με) $\dim V = 2$.
Τότε υπάρχει ορθομοναδιαία βάση $\{e_1, e_2\}$ του V
τ.ω.: $Ae_1 = \lambda_1 e_1$, $Ae_2 = \lambda_2 e_2$, όπου

$$\lambda_1 = \max\{ Q_A(w) \,/\, \|w\| = 1 \}$$
$$\lambda_2 = \max\{ Q_A(w) \,/\, \|w\| = 1 \}.$$

Απόδειξη.

Θεωρώ $Q_A : V \to \mathbb{R}$ με $e \in V$ ώστε:
$Q_A(e) = \max\{ Q_A(w) \,/\, \|w\| = 1 \} = \lambda_1$

Λήμμα $\Longrightarrow$ $Ae = \lambda_1 e$. | $Ae_1 = \lambda_1 e_1$
Θεωρώ βάση ορθομοναδιαία $\{ e_1 = e, e_2 \}$.

$$Ae_2 = \langle Ae_2, e_1 \rangle e_1 + \langle Ae_2, e_2 \rangle e_2$$
$$= \langle e_2, Ae_1 \rangle e_1 + Q_A(e_2) \cdot e_2 =$$
$$= \langle e_2, \lambda_1 e_1 \rangle e_1 + Q_A(e_2) \cdot e_2.$$

$Ae_2 = \lambda_2 e_2$, $\lambda_2 = Q_A(e_2)$
Αρκεί ν.δ.ο. $\lambda_2 = Q_A(e_2) = \min\{ Q_A(w) \mid \|w\| = 1 \}$.
$w \in V$, $\|w\| = 1$, $w = x e_1 + y e_2$
$Q_A(w) = \langle Aw, w \rangle = \langle A(xe_1 + ye_2), xe_1 + ye_2 \rangle = ⊛$

Πρόταση: Έστω S κανονική επιφάνεια $\forall p \in S$ η απεικόνιση Weingerten $L_p : T_pS \to T_pS$ είναι αυτοπροσαρτημένη ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle \, , \rangle_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$

$$\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_1, w_2 \rangle$$

⊛
$= \langle x\lambda_1 e_1 + y\lambda_2 e_2, xe_1 + ye_2 \rangle = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \geq \lambda_2 x^2 + \lambda_2 y^2 = \lambda_2 (x^2 + y^2) = \lambda_2$

Απόδειξη.

(*) $< L_p w_1, w_2 >_p = < w_1, L_p w_2 >$

Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντ. με παράμετρο $(u,v) \in U$

(*) $\overset{\text{ορθ.}}{\Longleftrightarrow} < LX_u, X_v > = < X_u, LX_v >$?

$LX_u = -(N \circ X)_u = -N_u$

$LX_v = -(N \circ X)_v = -N_v$

$< LX_u, X_v > = -< N_u, X_v > = -\{ (< N, X_u >)_u - < N, X_{uv} > \}$

$\Longrightarrow < LX_u, X_v > = < N, X_{uv} >$

$< X_u, LX_v > = -< X_u, N_v > = -\{ (< X_u, N >)_u - < X_{uv}, N > \}$

$\Longrightarrow < X_u, LX_v > = < N, X_{xu} >$

$L_p : T_pS \to T_pS$ αυτοπρόνος

Άρα ορίζεται η συμμετρική $B_p: T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$.

$B_p(w_1, w_2) = < L_p w_1, w_2 >$ $\quad w_1, w_2 \in T_pS$

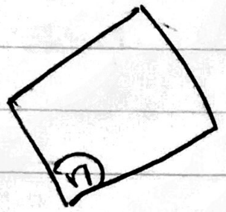
με αντίστοιχη τετραγωνική μορφή:

$\mathrm{II}_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$\mathrm{II}_p(w) = B_p(w,w) = < L_p w, w >$

Ορισμός: Η τετραγωνική μορφή $\mathrm{II}_p: T_pS \to \mathbb{R}$ καλείται δεύτερη θεμελιώδης μορφή της S στο P.

1) Επίπεδα: $L_p = 0$



$II_p : T_p\Pi \to \mathbb{R}$,

$II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle$, $w \in T_p\Pi$

$II_p = 0$

2) Κύλινδρος: $C_r : x^2 + y^2 = r^2$, $p \in C_r$

$L_p : T_p C_r \to T_p C_r$

$L_p w = \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0)$

$w = (w_1, w_2, w_3) \in T_p C_r$

$II_p : T_p C_r \to \mathbb{R}$

$II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle = \langle \frac{1}{r}(w_1, w_2, 0), (w_1, w_2, w_3) \rangle$

$II_p(w) = \frac{1}{r}(w_1^2 + w_2^2) \geq 0$

$II_p(0, 0, w_3) = 0$.

3) Σφαίρα S^2_R, $p \in S^2_R$, $L_p w = \frac{1}{r} w$

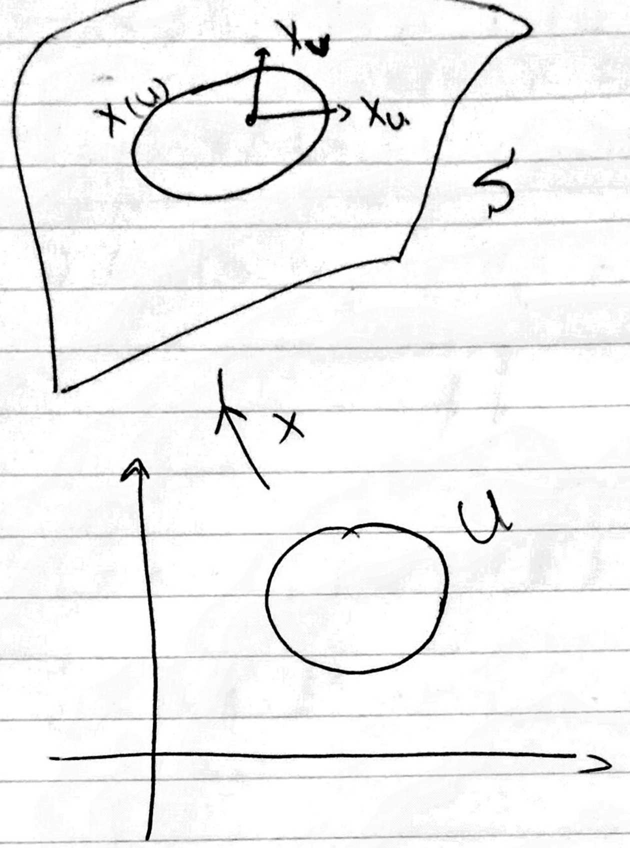
$II_p : T_p S \to \mathbb{R}$, $II_p(w) = \langle L_p w, w \rangle =$

$= \langle \frac{1}{r} w, w \rangle = \frac{1}{r} \langle w, w \rangle = \frac{1}{r} \|w\|^2 =$

$= \frac{1}{r} I_p(w)$

$II_p = \frac{1}{r} I_p$

Πίνακας της $2^{ης}$ Θεμελιώδους Μορφής



Έστω $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων.
Ο πίνακας των II_p $p = X(u,v)$ είναι:

$$\begin{pmatrix} \langle L_p X_u , X_u \rangle & \langle L_p X_u , X_v \rangle \\ \langle L_p X_v , X_u \rangle & \langle L_p X_v , X_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

Οι λείες συναρτήσεις $e, f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$e = \langle L X_u , X_u \rangle = II(X_u)$

$f = \langle L X_u , X_v \rangle = \langle L X_v , X_u \rangle$,

$g = \langle L X_v , X_u \rangle = II(X_v)$

καλούνται θεμελιώδη ποσά $2^{ης}$ τάξης του S ως προς X.

$w \in T_pS: \quad w = aX_u + bX_v$

$$\mathrm{II}_p(w) = \langle Lw, w\rangle = \langle L(aX_u + bX_v), aX_u + bX_v\rangle =$$
$$= \langle aLX_u + bLX_v, aX_u + bX_v\rangle =$$
$$= \langle LX_u, X_u\rangle a^2 + \langle LX_u, X_v\rangle ab +$$
$$+ \langle LX_v, X_u\rangle ab + \langle LX_v, X_u\rangle b^2$$

$$\boxed{\mathrm{II}_p(w) = ea^2 + 2f\cdot ab + gb^2, \quad w = aX_u + bX_v}$$

Υπολογισμός των e, f, g !!

$$e = \langle LX_u, X_u\rangle = -\langle dN(X_u), X_u\rangle =$$
$$= -\langle (N\circ X)_u, X_u\rangle$$
$$= -\{(\langle N, X_u\rangle)_u - \langle N, X_{uu}\rangle\}$$

$$\boxed{e = \langle N, X_{u,u}\rangle}$$

$$f = \langle LX_u, X_v\rangle = -\langle dN(X_u), X_v\rangle =$$
$$= -\langle N_u, X_v\rangle = -\{(\langle N, X_v\rangle)_u - \langle N, X_{vu}\rangle\}$$

$$\boxed{f = \langle N, X_{uv}\rangle}$$

$$g = \langle LX_v, X_v\rangle = -\langle dN(X_v), X_v\rangle =$$
$$= -\langle N_v, X_v\rangle = -\{(\langle N, X_v\rangle)_v - \langle N, X_{vv}\rangle\}$$

$$\boxed{g = \langle N, X_{vv}\rangle}$$

(Θεωρία πολλών μεταβλητών)

$\langle N, X_{vu}\rangle \quad | \quad X_{uv} = X_{vu}$

$$E = \|X_u\|^2 = \langle X_u, X_u \rangle$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle$$

$$G = \|X_v\|^2 = \langle X_v, X_v \rangle$$